

FRACTURE MECHANICS FORMULAS ON MICROCOMPUTERS

M. Afzali, Z. Chaiblaine, H. Gregoire

(NASA-TM-77850) FRACTURE MECHANICS FORMULAS  
ON MICROCOMPUTERS (National Aeronautics and  
Space Administration) 53 p HC A04/MF A01

N85-30362

CSCL 20K

Unclass

G3/39 21564

Translation of "Formulaire rupture sur micro-ordinateurs," Centre  
Technique des Industries Mecaniques, Senlis, France, September  
1983, pp. 1-49.

NASA-TM. 77850.

N85-30362

N84-31722# Centre Technique des Industries Mecaniques, Senlis (France).

**FRACTURE MECHANICS FORMULAS ON MICROCOMPUTERS**  
**Final Report [FORMULAIRE RUPTURE SUR MICRO-**  
**ORDINATEURS]**

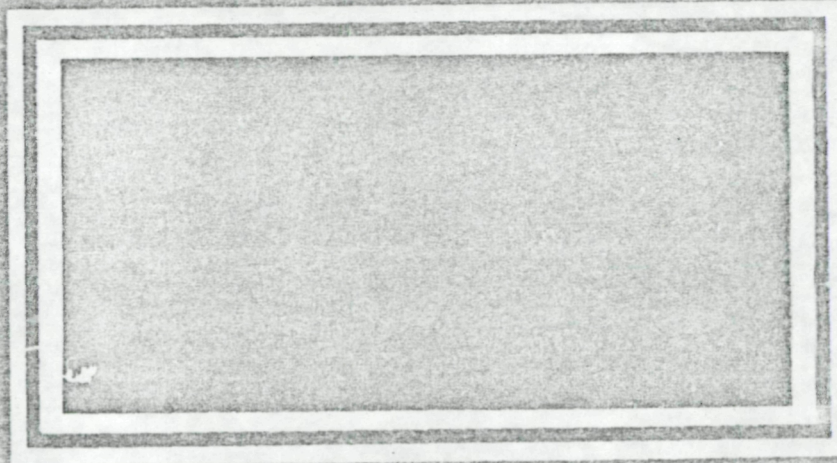
M. Afzali, Z. Chaiblaine (Ecole des Mines d'Ales, France), and H. Gregoire (Ecole des Mines d'Ales, France) Sep. 1983 49 p refs In FRENCH

(CETIM-100960) Avail: NTIS HC A03/MF A01

An interactive fracture mechanics program was developed in BASIC minima on a CBM 4032 microcomputer. It furnishes stress intensity factors and the critical size of a flaw. Author (ESA)

No

4

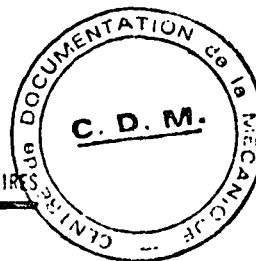




CODE DE DIFFUSION

- 01 - non restrictive
- 02 - ressortissants seuls
- 03 - profession concernée
- 04 - commission seule
- 05 - interne CETIM
- 06 - confidentiel (exemplaire n° )

DESTINATAIRES OBLIGATOIRES



DG  
DGS } 1 ex.

SCP

DP

SCPI-DATRI

Ets SENLIS

Ets NANTES

Ets SAINT ETIENNE

C.D.M.

Publications

Département émetteur

AUTRES DESTINATAIRES

5 OCT. 1983

ETUDE N° 100960

TITRE - Formulaire Rupture sur micro-ordinateurs

Auteur - M. AFZALI

RAPPORT - ~~projeté~~

Final

Section n° 441

NTI 83/31

Fait à Senlis , le septembre 1983

724





## FICHE SIGNALÉTIQUE RÉSUMANT LES RÉSULTATS OBTENUS

Titre du rapport Formulaire rupture sur micro-ordinateurs

CCPR n° 100960

Rapport partiel n°



Rapport final \*



date septembre 1983

Auteurs (en cas de sous-traitance, préciser le nom de l'organisme associé): M. AFZALI

(MM. Chaiblaine Z et Grégoire H - Ecole des Mines d'Alès)

Code de diffusion proposé (en cas de diffusion restreinte, indiquer pourquoi et à qui):

### Rappel de la situation de départ

(origine de la demande, but initial, point de l'acquis existant au CETIM ou ailleurs, motivations technico-économiques, cibles visées\*\*)

Dans le même objectif que le logiciel RDM, un programme pour le calcul de différents paramètres en mécanique de la rupture a été mis au point sur micro-ordinateur.

### Nature du travail accompli

(analyse bibliographique, étude théorique, expérimentale ou mixte)

Etude bibliographique, réalisation du logiciel

### Résultats effectivement atteints (positifs et négatifs)

Préciser: leur nature, théorique ou pratique; s'ils sont directement utilisables ou utilisables moyennant des travaux complémentaires, des action pilotes, etc.; leur présentation (formules, courbes, logiciels, données technologiques, etc.)

Le logiciel réalisé est utilisable, néanmoins quelques améliorations de compatibilité avec d'autres logiciels (RDM) sont nécessaires.

Cibles effectivement intéressées \*\* Toutes industries ayant à estimer la nocivité des défauts qui peuvent apparaître soit lors de la fabrication des composants mécaniques, soit en service.

### Formes de transfert en cours ou envisagées à court terme

(Préciser les applications déjà réalisées au titre de l'assistance technique ou en laboratoire, les applications souhaitables compte tenu du but recherché, les autres modes de diffusion envisagés: publications, colloque, conférences; indiquer s'il y a lieu de penser à une action de formation CETIM)

- vente du logiciel CA.ST.OR Rupture utilisable sur CBM 4032
- publication

### Perspectives d'évolution

- . Amélioration de l'architecture de base
- . Introduction de nouvelles configurations
- . Introduction de lois de propagation de fissure
- . Adaptation sur d'autres matériels.

\* Prévoir de joindre copie de cette fiche à la demande de clôture de l'étude: sa présentation dispensera du libellé des conclusions

\*\* Cf. indications figurant au verso

**Observations ou compléments éventuels**

**Cibles: préciser**

**a) Pour les entreprises mécaniciennes ressortissantes**

—leur secteur professionnel (robinetterie, pompe ...)

—leur taille: <50 salariés

entre 50 et 100

entre 100 et 500

entre 500 et 1000

>1 000

—le service intéressé: Bureau d'études

Méthodes

Fabrication

Contrôle

**b) Pour les autres: leur activité (ingénierie, société de services, automobiles, nucléaire,...)**

**c) Ne pas hésiter à mentionner, s'il y a lieu, des laboratoires de recherches français ou étrangers (universitaires, de grandes entreprises ou autres).**

A la suite de l'étude "formulaire RDM sur micro-ordinateurs" et compte-tenu des besoins des industriels, un logiciel dans le domaine de la mécanique de la rupture a été mis au point.

Il existe actuellement un certain nombre de tels formulaires dans la littérature scientifique anglo-saxonne, les résultats étant, la plupart du temps, présentés sous forme d'abaques. Ces documents étant rares sur le marché, ils sont généralement inconnus des utilisateurs. De plus, ils sont souvent incomplets (pris séparément). Il nous a donc paru utile de collecter les différentes informations dans les manuels disponibles et de les mettre à la disposition des utilisateurs sous une forme facilement exploitable, grâce à la micro-informatique.

Cette étude a permis de créer un outil d'estimation de la nocivité des défauts sur des modèles géométriques simples et pour différents chargements élémentaires.

L'architecture principale du programme est réalisée et bien que n'étant pas encore au niveau de celle du CA.ST.OK RDM, elle est néanmoins utilisable. Un certain nombre de configurations bidimensionnelles ont été implantées.

Le logiciel est réalisé en BASIC minima sur CBM 4032, qui assure une bonne transportabilité sur un grand nombre de micro-ordinateurs avec peu de modifications. L'utilisation de ce logiciel se fait d'une manière interactive sous forme "questions-réponses". L'utilisateur est guidé par la machine pour choisir la géométrie, le type de fissure et le chargement. Il est possible de modifier les données paramétrées et de faire plusieurs calculs sans avoir à relancer une exécution complète, ce qui permet de réduire les temps d'exploitation.

L'utilisateur a le choix du type de résultat fourni :

- facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II
- taille critique du défaut : dans ce cas il doit fournir la valeur de la tenacité  $K_{IC}$  qui est une propriété intrinsèque du matériau.

L'intérêt majeur de ce logiciel est le gain de temps dans le calcul de différents paramètres en mécanique de la rupture.

Lors de la recherche de la taille critique de défaut dans des géométries compliquées ou sous chargements complexes par la méthode des Eléments Finis ou celle des Equations Intégrales, il est souvent nécessaire d'avoir une idée de cette longueur afin de minimiser le nombre d'analyses. Ce logiciel peut être utilisé pour avoir la réponse à cette question par une modélisation simple de la structure, l'amélioration de la précision des résultats étant ensuite obtenue par des analyses utilisant des méthodes citées ci-dessus et réalisables par CA.ST.OR 2D (structure bidimensionnelle) et CA.ST.OR 3D (structure tridimensionnelle).

Pour compléter les performances de ce logiciel, il a été prévu de :

- a) compléter les configurations qui peuvent être traitées : géométrie type de fissures, chargements.
- b) intégrer des lois de propagation de fissure en fatigue permettant une estimation de la durée de vie des structures fissurées soumises à des charges dynamiques, ce qui présente un grand intérêt industriel.

Cette étude a fait l'objet du stage de fin d'Etude de Messieurs Grégoire et Chaiblane, étudiants à l'Ecole des Mines d'Alès, qui s'est déroulé au CETIM de Mars à Juin 1983.

Ce texte est complété par les annexes suivantes :

- annexe 1 : Rapport du Projet Industriel "Formulaire Mécanique de la rupture" de Messieurs CHAIBLAINE Zober et GREGOIRE Hervé - Ecole Nationale Supérieure des Techniques Industrielles et des Mines d'Alès - Juin 83.
- annexe 2 : Exemples d'utilisations
- annexe 3 : Configurations traitées dans :
  - . Stress Intensity Factors : DP ROOKE - DJ CARTWRIGHT
  - . The stress Analysis of Cracks Handbooks : H. TADA - P. PARIS - G. IRWIN et configurations implantées dans FAINCO

ANNEXE 1

PROJET INDUSTRIEL

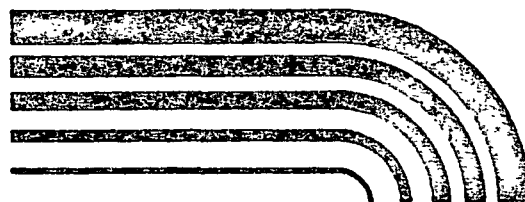
FORMULAIRE MÉCANIQUE DE LA RUPTURE



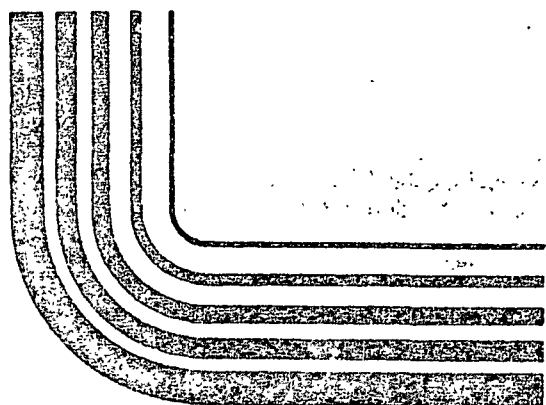
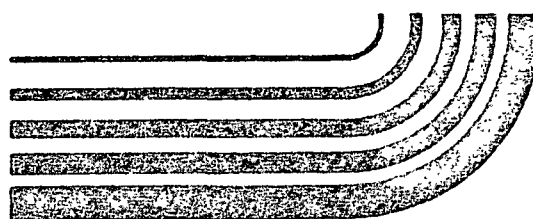
MINISTERE DE L'INDUSTRIE  
ET DE LA RECHERCHE



PROJET  
INDUSTRIEL



ECOLE NATIONALE  
SUPERIEURE  
DES TECHNIQUES  
INDUSTRIELLES  
ET DES MINES D'ALES



Année 1982-1983

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES  
ET DES MINES D'ALÈS

PROJET INDUSTRIEL

FORMULAIRE MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

CHAIBLAINE Zober

GREGOIRE Hervé

du 14 mars 1983

au 30 juin 1983

## SOMMAIRE

I	PRESENTATION DU CETIM	p 5
II	PRESENTATION DU SUJET	
II.1	Historique	p 6
II.2	Objet	p 7
II.3	Généralités sur la rupture	p 8
III	ETUDES THEORIQUES	
III.1	Théorie linéaire de la mécanique de la rupture	p 14
III.2	Théorie de la mécanique de la rupture en élastoplastique	p 21
III.3	Méthodes numériques	p 24
IV	LOGICIEL	
IV.1	Conception	p 27
IV.2	Organigramme	p 28
IV.3	Exemple	p 29
V	CONCLUSION	p 33
VI	BIBLIOGRAPHIE	p 34

Durant ce trimestre passé au CETIM où nous avons pu mener à bien notre projet, nous avons apprécié le sérieux et la compétence de son personnel. Pour notre part nous tenons à remercier vivement Monsieur BOISSENOT, chef du département "Calcul", Monsieur DEVALAN, chef du service "Méthode de calcul pour bureaux d'études" et Mademoiselle CHAUDOUET, chef du service "Mécanique du solide" où nous étions rattachés.

Ils nous ont en effet guidés dans un domaine qui était nouveau pour nous, puisque non enseigné à l'école.

Nous associerons à ces remerciements Monsieur AFZALI MANSOUR, spécialiste de la mécanique de la rupture, dans le département qui nous a suivi tout au long de notre étude.

Enfin, nous n'oublierons pas la gentillesse et la disponibilité des personnes du département qui nous ont apportés la dimension humaine dans l'entreprise.

PRESENTATION DU CETIM

Le CETIM (Centre technique des industries mécaniques) est un établissement d'utilité publique sans but lucratif où travaillent environ 600 ingénieurs et techniciens de haut niveau. Son objet principal est de promouvoir le progrès des techniques dans l'Industrie mécanique. Il effectue pour le compte des entreprises des recherches sur des points particuliers. Il exécute ou fait exécuter les recherches d'intérêt général qui tout en restant dans le domaine appliqué ne sont ni du ressort des services de recherche des sociétés privées ni de celui des laboratoires de recherche fondamentale. Il assure le transfert des résultats de ses travaux dans l'industrie, rassemble et diffuse les informations et les innovations étrangères.

Ses moyens sont remarquables en personnel comme en matériel. Des équipements parmi les plus modernes sont mis à la disposition des spécialistes qualifiés.

Le département CALCUL du CETIM (Senlis), où nous effectuons notre projet regroupe plusieurs services dont les activités respectives concernent les domaines suivants :

- analyse mathématique des structures en comportement statique ou dynamique, dans les domaines élastique, plastique, viscoplastique
- application aux études de comportement de structures pouvant conduire à la rupture ou résultant d'un mauvais fonctionnement de machines.

Les objectifs communs, à ces différents secteurs d'activités orientés vers les transferts techniques à l'industrie sont principalement, l'implantation dans l'industrie des méthodes de calcul les plus avancées ; l'appui technique aux syndicats professionnels pour l'établissement des codes de calcul et l'aide directe aux entreprises dans le cadre d'actions spécifiques à chacune d'entre elle.

Parmi toutes ces activités qui visent à établir une liaison permanente entre les recherches fondamentales effectuées dans les laboratoires universitaires et les applications industrielles, une part assez importante est réservée à la diffusion des connaissances et l'enseignement des nouvelles méthodes de dimensionnement de structures.

Dans l'industrie on a souvent tendance à séparer la "pratique" (qui seule sert à quelque chose) de la théorie considérée comme un ornement pour lequel on éprouve tout au plus un respect mêlé de crainte. Le calcul des structures est pourtant aussi vieux que la mécanique elle-même.

Le CETIM s'est engagé depuis longtemps dans le développement de programmes généraux de calcul basés sur la méthode des éléments finis ou sur la méthode des équations intégrales.

Le programme que nous avons mis au point s'inscrit dans le cadre général du code CA.ST.OR (calcul de structure par Ordinateur) lui-même scindé en 4 parties distinctes.

Le CASTOR 2D réalise des analyses thermiques et élastiques dans le domaine statique de structures planes ou de révolution.

Le CASTOR 3D réalise des analyses thermiques en régime permanent et transitoire et des analyses mécaniques dans le domaine élastique, linéaire et statique de pièce traditionnelle.

Le CASTOR SD réalise des analyses mécaniques statiques et dynamiques dans le domaine élastique linéaire de structures assemblées tridimensionnelles (corps à fibre neutre et milieux continus)

Le CASTOR MT calcule les vibrations (fréquence et déformées modales) de torsion de ligne d'arbres quelconque



## II PRESENTATION DU SUJET

### II.1 Historique

Dès le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle, les chercheurs se sont intéressés aux ruptures d'essieux et ont été amenés à l'étude de fissurations progressives sous chargement cyclique.

Depuis, des phénomènes de rupture différée (fatigue statique) où la rupture est obtenue sous sollicitation fixe maintenue, des phénomènes de corrosion sous tension, des phénomènes de rupture par fluage ont été également étudiés. Malgré cela, les études sérieuses entreprises dans le domaine de la mécanique de la rupture datent des années 1920-1930 seulement, ses précurseurs ont pour noms IRVIN et GRIFFITH (11). La mécanique de la rupture est donc une branche toute récente de la mécanique et on comprendra mieux ainsi sa difficile insertion dans les bureaux d'études ou dans les écoles.

Les ruptures les plus spectaculaires sont les ruptures catastrophiques qui se traduisent par la propagation brutale d'une fissure sous des contraintes moyennes bien inférieures à la limite d'élasticité globale.

De tels phénomènes ont fait la une des journaux en leur temps, on peut citer pour mémoire, un navire de guerre qui s'est ouvert sur toute sa largeur, une multitude de chaudières qui ont explosées et enfin plus récemment les premiers avions à réaction anglais du type COMET dont les hublots volaient en éclat lors de changement rapide d'altitude et entraînait la perte de l'avion.

Dans ce dernier cas on a appris plus tard que la taille critique des défauts était faible et non décelable.

De telles ruptures ont été étudiées depuis plus d'un demi-siècle mais elles se sont multipliées récemment avec l'emploi d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques et soumis à des sollicitations de plus en plus élevées, ainsi que l'augmentation des dimensions, celle-ci étant permise par le soudage.

Malheureusement les méthodes conventionnelles d'évaluation de la tenue ne peuvent être extrapolées pour des matériaux comportant un défaut susceptible de provoquer une forte concentration de contraintes. Pour des alliages peu ductiles et sous certaines conditions de sollicitations favorisant un degré élevé de triaxialité de contraintes, un défaut même de très faible dimension suffit à développer localement des instabilités conduisant à la rupture brutale. Ces défauts sont inévitables dans toute structure (inclusions, microcavités, microfissures) et il a paru fondamental d'être en mesure de prévoir les dimensions critiques des fissures qui, sous des contraintes données, provoquent des ruptures brutales.

Cela a conduit à l'introduction d'une certaine caractéristique de "tenacité" des matériaux "fracture toughness" spécifique de l'aptitude de ceux-ci à résister à la propagation brutale d'une fissure.

L'étude du comportement des métaux dans des conditions d'essai qui se rapprochent des conditions réelles de service, permet d'analyser la "susceptibilité" à la rupture, compte-tenu de la contrainte appliquée de la géométrie de la pièce et des conditions locales à fond de fissures.

## II.2

### Objet

Répondre au désir des industriels en ce qui concerne la tenue d'une structure fissurée soumise à un chargement donné. Actuellement, la méthode est peu utilisée en France, mais permet de résoudre de nombreux problèmes insolubles par d'autres théories. Elle cherche, à établir un critère de non fragilité pour chaque matériau, permettant de mieux définir la résistance à des sollicitations uniques ou répétées de pièces et d'ensembles mécaniques et de prévoir les risques de développement plus ou moins rapides, ou la certitude de non extension des fissures ou microfissures que l'on y rencontre, celles-ci étant préexistantes dans la pièce finie, ou y étant apparues à un moment donné sous l'effet de contraintes internes (vieillessement) ou externes.

Dans notre projet nous nous sommes limités à l'étude des pièces planes soumises à un chargement invariant (indépendant du temps). L'utilisateur intégrera, dans le programme que nous avons conçu, les caractéristiques géométriques de la pièce et de la fissure ainsi que le chargement. Il connaîtra alors K facteur d'intensité de contrainte qu'il comparera à la valeur critique K<sub>c</sub>, représentant la tenacité de la pièce étudiée, valeur intrinsèque du matériau. Physiquement si  $K < K_c$  la fissure sera dite "stable" et ne se propagera pas, la pièce pourra rester en service sous les mêmes sollicitations, si  $K = K_c$  la fissure deviendra instable et se propagera lentement, il conviendra ici de changer de pièce, enfin, si  $K > K_c$  la fissure doit se propager de façon brutale mais en général on n'atteint pas cette limite car la pièce a déjà cédée avant de procéder au calcul.

Dans le cas où l'utilisateur a vérifié que la pièce résiste correctement il peut alors s'interroger pour connaître la valeur de la taille critique du défaut ou de la fissure ( $a_c$ , valeur correspondant à  $K_c$ ,  $K_c = f(a_c)$ ) longueur à partir de laquelle la fissure deviendra instable. Ainsi, l'industriel pourra appréhender de façon quantitative la marge entre les deux tailles de fissure.

Pour l'étude de la résistance statique d'un matériau comportant une ou plusieurs fissures soumises à des chargements constants ou lentement croissants, il est fait appel dans un premier temps à la théorie de l'élasticité qui démontre qu'au voisinage immédiat d'une fissure, la limite d'élasticité du matériau peut être largement dépassée et que des déformations plastiques, peut être très localisées, sont inévitables. Sans en tenir compte, il est parfois possible d'introduire un paramètre supplémentaire (tension superficielle ou forces de cohésion du matériau) et de retenir en première approximation les résultats de l'élasticité classique (théorie de GRIFFITH). Les calculs théoriques nécessitent un fréquent recours à l'analyse numérique (éléments finis ou équations intégrales) et deviennent rapidement fort complexes, sinon insolubles, entraînant donc des coûts prohibitifs.

Il s'ensuit que de nombreux problèmes de structures sont encore traités dans le cadre de la théorie de l'élasticité en faisant intervenir des facteurs correctifs basés sur un processus de déformation plastique particulier conduisant à des calculs relativement simples (théorie de Dugdale) ou même des coefficients d'adaptation purement empiriques.

### II.3 Généralités sur les ruptures

Soumis à des sollicitations, les métaux présentent différents types de rupture selon qu'ils sont fragiles ou ductiles.

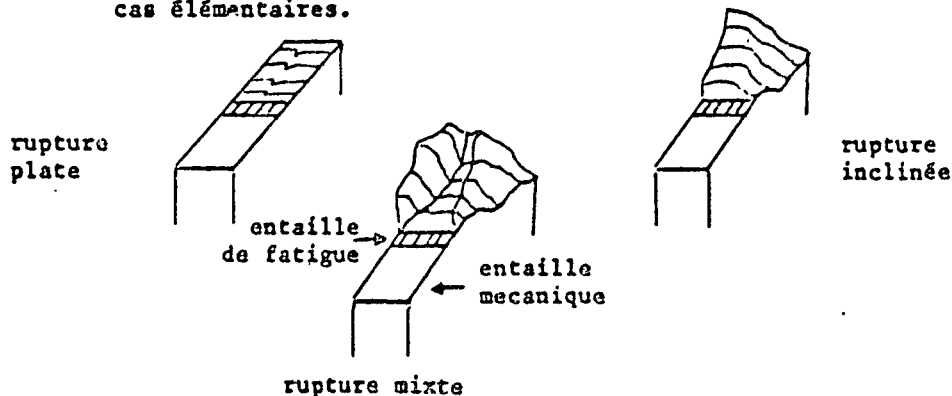
La rupture d'un acier ductile se fait par glissement et arrachement après une striction importante.

Les matériaux fragiles se rompent apparemment sans déformation, mais même par ce type de rupture, il est démontré qu'un certain écrouissage a lieu au voisinage immédiat de l'amorce de cassure.

A l'échelle microscopique on peut considérer deux types principaux de rupture :

la rupture plate et la rupture inclinée.

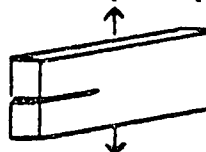
Dans la plupart des cas, la rupture est mixte : combinaison des deux cas élémentaires.



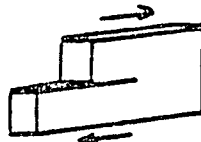
A ce stade d'étude il devient nécessaire d'introduire la notion de mode de rupture.

Si l'on considère un état initial dans lequel une fissure plane est soumise à un système de forces et en supposant que sa propagation se fasse dans son plan, on montre que l'état le plus général peut être ramené à la superposition de 3 modes simples:

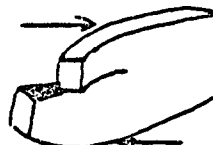
mode I (opening mode , ouverture) les surfaces de fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre.



mode II (sliding mode, glissement droit) les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure.



mode III (tearing mode, déchirement vis) les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure.



Les ruptures dangereuses sont généralement des ruptures de mode I, c'est pourquoi la plupart des études ont porté sur ce mode. En vue de simplifier l'exposé, nous nous placerons par hypothèse dans le cas du mode I.

### Critère de rupture

Une observation expérimentale importante est que la tension nominale nécessaire à la rupture d'un matériau donné est fonction de la dimension de la fissure génératrice, ce qui est illustré par la figure ci-dessous.

Pour une longueur de fissure donnée, la fissure étant en équilibre si on augmente la sollicitation  $\sigma$  jusqu'à extension brutale, le coefficient K augmente linéairement jusqu'à une valeur critique  $K_{Ic}$

Comme on peut l'observer sur la figure ci-dessous, le début d'extension rapide de fissure, pour des spécimens ayant différentes longueurs de fissuration, se produit pour des valeurs différentes de la contrainte nominale, mais pour une valeur constante de  $K_{Ic}$ , notée KIC, ( quand  $\sigma < \sigma_1$  )

Ce paramètre caractérise la résistance à la rupture. Lorsque celui-ci est connu on peut calculer la relation qui existe entre la contrainte appliquée et la taille critique de la fissure. On peut noter que KIC est indépendant de l'épaisseur de la structure étudiée, au delà d'une certaine limite (cf fig. 2)

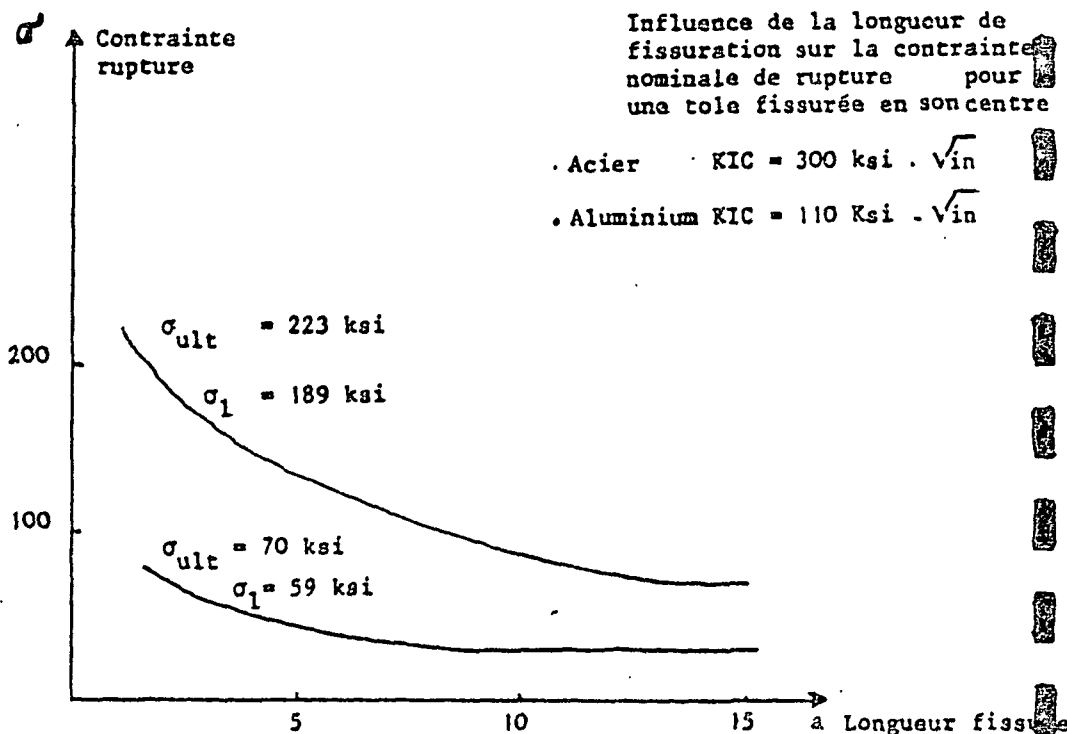


Fig 1

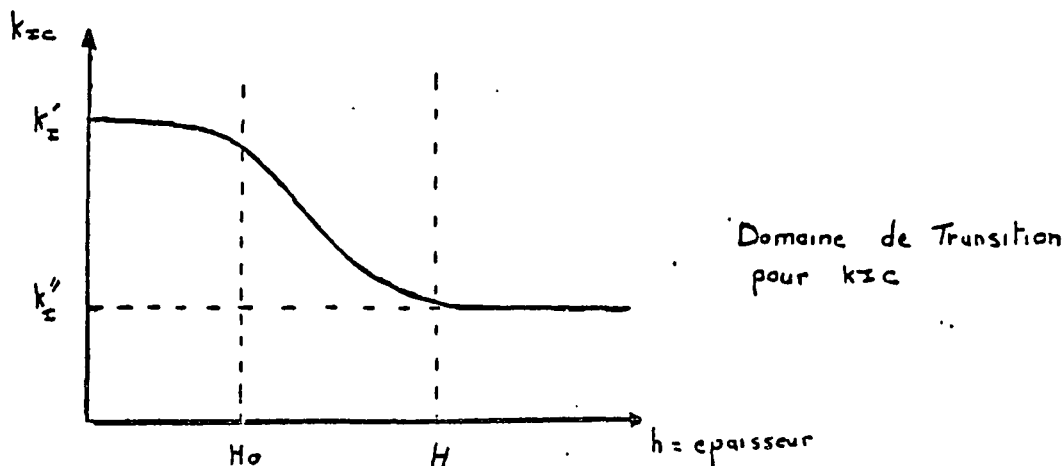


fig. 2

On peut aussi remarquer que pour une température d'essai donnée, le matériau est d'autant plus fragile (acier à haute limite élastique, alliage résistant titane à l'aluminium), que sa vitesse de déformation et son épaisseur sont grandes. La fragilité diminue quand la température augmente.

En résumé, la mécanique linéaire de la rupture n'explique pas la "rupture", mais elle prédit qu'elle se produira chaque fois que le champ de contraintes en fond de fissure caractérisé par  $K_I$  (on pourrait raisonner de même pour les autres modes) atteint une amplitude critique dénotée par  $K_{IC}^*$  en contraintes planes et  $K_{IC}$  en déformations planes. La connaissance de  $K_{IC}^*$  et  $K_{IC}$  permet de calculer la contrainte maximale qu'un matériau peut supporter sans se rompre en présence d'un défaut de longueur connue. Dans les applications industrielles, la valeur de  $K_{IC}$  pour un matériau caractérise quantitativement sa résistance, cette valeur est indépendante des formes de l'entaille et de l'éprouvette.

D'autres théories basées sur des méthodes énergétiques ont été élaborées (GRIFFITH, barenblatt (12)).

Des équivalences ont été établies pour donner des résultats similaires. Nous allons maintenant nous intéresser à la détermination expérimentale de  $K_{IC}$ .

#### Détermination de $K_{IC}$

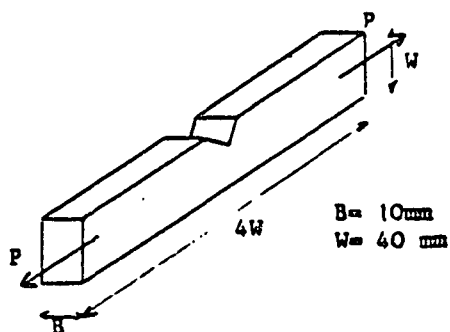
Pour caractériser la fragilité d'un matériau, notamment sa sensibilité à la propagation des fissures, on a souhaité disposer d'un paramètre plus significatif que la résilience.  $K_{IC}$  caractérise assez bien les matériaux fragiles, les aciers à haute limite élastique (faible allongement) ainsi que certains alliages résistants de titane ou d'aluminium.

Par contre, ce critère ne convient pas aux matériaux usuels, tels que les aciers mi-durs et les aciers de construction d'usage courant.

Pour déterminer ce paramètre, divers types d'éprouvettes sont utilisés :



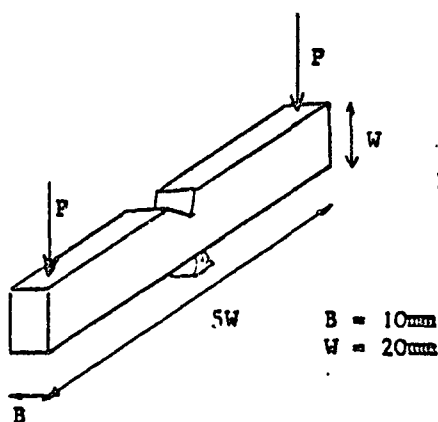
- Eprouvette de traction



$$K_{Ic} = \frac{Pc}{B\sqrt{W}} \left[ 1,99\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 0,41\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 18,70\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 38,48\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 53,85\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \right]$$

B = 10mm  
W = 40 mm

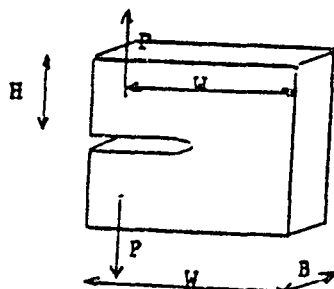
- Eprouvette de flexion



$$K_{Ic} = \frac{Pc}{B\sqrt{W}} \left[ 11,58\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 18,42\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} - 87,10\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 150\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 154\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \right]$$

B = 10mm  
W = 20mm

- Eprouvette C.T.



W = 2 B  
H = 1,2 B  
Wl = 2,5 B

$$K_{Ic} = \frac{Pc}{B\sqrt{W}} \left[ 29,6\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 185,5\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} + 655,7\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 1017\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 638,9\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2} \right]$$

Ces éprouvettes sont d'une mise en oeuvre facile et il semble qu'elles soient d'un usage de plus en plus courant dans l'étude des aciers à résistance moyenne.

L'A.S.T.M. (American Society for Testing Materials (13) ) a proposé des recommandations d'emploi de certaines de ces éprouvettes et une norme d'essai. Les diverses formules donnent KIC de la forme :

$$KIC = \frac{P_C}{B \sqrt{W}} Y\left(\frac{a}{W}\right) \quad \text{(des courbes d'étalonnage } Y\left(\frac{a}{W}\right) \text{ permettant}$$

d'obtenir KIC si on connaît a et la charge critique  $P_C$  à l'instabilité).

Toutefois, dans certains domaines, fissures de réservoir par exemple, où se produisent des déformations plastiques non négligeables, la signification de KIC devient aléatoire et l'utilisation de ce critère est alors déconseillé.

### III ETUDES THEORIQUES

#### III.1 Théorie linéaire de la mécanique de la rupture

Le premier objectif de l'analyse de la rupture est d'obtenir les caractéristiques de la région contenant la fissure. Définir les valeurs de  $K$ , facteur d'intensité de contraintes en fonction de la loi de comportement linéaire élastique, nécessite seulement les connaissances des contraintes et déformations à proximité de la fissure. Cependant, l'étude de l'extension de la fissure implique la mesure des déplacements à distance des bords de fissure. Ainsi la résolution des problèmes de rupture permet de connaître les champs de contraintes et de déplacements dans la structure étudiée.

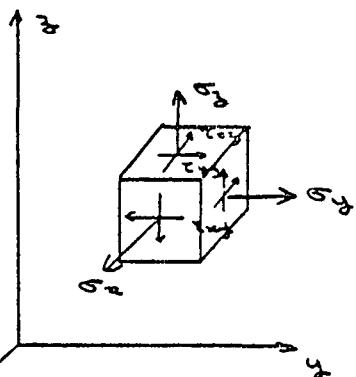
Les solutions de plusieurs problèmes de rupture en mode I ou II sont connus dans le cas de structures planes infinies et peuvent être obtenues par la théorie de l'élasticité linéaire. La connaissance de  $K$  pour des structures planes et finies requiert une approche numérique

Dans de tels problèmes, cependant, on peut prendre comme modèle celui des pièces infinies si les méthodes numériques sont déficientes

#### Développement théorique :

Considérons un morceau infinitésimal de solide en équilibre soumis à un ensemble de contraintes :

- Force volumique  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$
- l'équation d'équilibre  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = 0$  donne en projetant sur les 3 axes :



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + f_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

. Si l'on raisonne sur une structure à 2 dimensions (plane) on aura dans le cas de :

$$\begin{aligned} \text{a) contraintes planes : } & \sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \\ \text{b) déformations planes : } & \begin{cases} \epsilon_z = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

. Les équations deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

. Nous allons introduire une fonction  $\phi$  définie par :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$\phi$  est appelée fonction contrainte d'AIRY

. La loi de comportement de HOOKE est donnée par

$$\begin{cases} E\epsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\epsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\epsilon_{xy} = 2(1+\nu)\tau_{xy} \end{cases} \quad (4)$$

où  $\sigma_z = 0$  pour les contraintes planes

$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  pour les déformations planes

L'équation de compatibilité des déplacements donne :

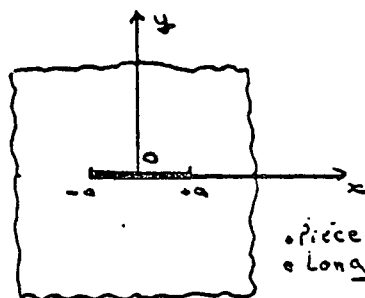
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

En substituant les équations (3) dans le système (4) on aura :

$$\boxed{\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0} \quad \text{Equation AIRY} \quad \left( \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Cette équation est valable en contraintes planes et en déformations planes.

- Solution de l'Equation d'AIRY



La pièce et le repère (oxy) sont définis par la figure ci-contre.

• pièce infinie  
• longueur fissure = 2a

A ce stade de l'étude MUSKHELISHVILI a introduit la fonction  $F$ , fonction de la variable complexe  $z$ , définie comme suit

$$F = Z^* \phi(z) + \chi(z) \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} Z &= x + iy \\ Z^* &= x - iy \end{aligned}$$

WESTERGAARD a simplifié le problème en proposant comme solution :

$$\phi = \operatorname{Re} (\bar{Z} (z)) + Y \operatorname{Im} (Z (z)) \quad (5)$$

où  $\bar{Z} = \frac{d\bar{Z}}{dz}$

$$Z = \frac{dZ}{dz}$$

$$Z' = \frac{dZ}{dz}$$

et  $\operatorname{Re}$  = partie réelle,  $\operatorname{Im}$  = partie imaginaire

Apartir de (1) et (5) les contraintes seront données par

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z - Y \operatorname{Im} Z'$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} Z + Y \operatorname{Im} Z'$$

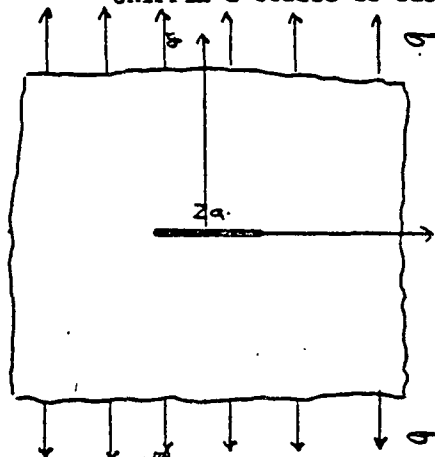
$$\tau_{xy} = -Y \operatorname{Re} Z'$$

Après développement théorique intégrant les conditions aux limites, on aboutit donc à une solution de la forme :

$$Z(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - (a/z)^2}} \quad (6)$$

# Fissure de GRIFFITH :

GRIFFITH a étudié le cas suivant :



plaque contenant une fissure centrale de longueur  $2a$ , soumise a des contraintes telles que :

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma \\ \sigma_x = 0 \text{ et } \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

En posant :  $Z = r e^{i\theta}$   
 $Z - a = r_1 e^{i\theta_1}$   
 $Z + a = r_2 e^{i\theta_2}$

où  $Z$  représente l'affixe du point  $P$  étudié, l'équation (6) devient alors :

$$Z = \frac{\sigma \cdot r}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{-i(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2})} \quad (7)$$

. Les points appartenant à la fissure sont définis par :

$$|x| < a \text{ et } Y = 0$$

. En s'éloignant de la fissure on a  $Z$  qui tend vers l'infini et le champ de contrainte devient :

$$\begin{cases} \sigma_y = \sigma \\ \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

. Pour les valeurs petites de  $r/a$  en prenant

$$r = a \quad r_2 = 2a \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta_2 = 0$$

(7) devient 
$$Z = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\theta/2}$$

en faisant le changement de variable suivant :  $\xi = r_1 e^{i\theta_1} = Z - a$

On obtient l'expression :

$$Z(\xi) = K / \sqrt{2\pi\xi}$$

avec :  $K = K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$

$K$  est défini comme étant le facteur d'intensité de contraintes.



Par analogie on obtient aisément :

en mode II :  $K_{II} = \tau_{xy} \sqrt{\pi a}$

en mode III :  $K_{III} = \tau_{yz} \sqrt{\pi a}$

- Facteur Intensité de contraintes et facteur concentration de contraintes :

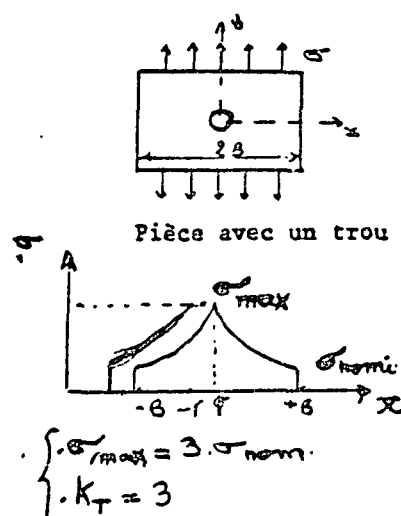
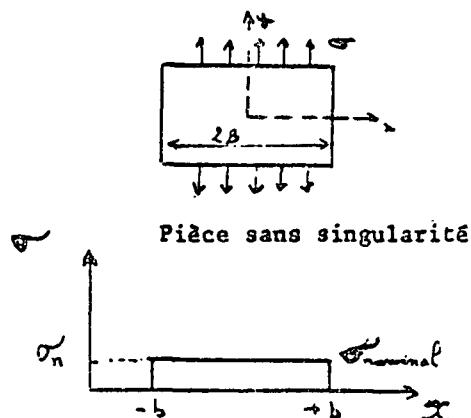
Nous venons de définir le facteur d'intensité de contraintes pour une surface infinie. Il ne dépend que de la répartition des contraintes dans un corps donné et de la géométrie de la fissure. A partir de considérations dimensionnelles on peut observer que le facteur d'intensité de contraintes doit contenir l'amplitude des forces de charge pour des corps linéairement élastiques et qu'il doit aussi dépendre de la configuration du corps fissuré.

Aussi le facteur d'intensité de contraintes peut être interprété physiquement comme un paramètre qui reflète la redistribution des contraintes dans un corps, due à l'introduction d'une fissure et en particulier, il indique le mode et l'amplitude de transmission de force à travers la région fissurée.

Le facteur d'intensité de contraintes, lui, représente le rapport entre la contrainte en un point d'une pièce comportant un défaut, soumise à un chargement donné et la contrainte nominale (contrainte au même point de la pièce sans défaut soumise au cas de charge en question).

on a :  $\sigma_{\max} = K_T \sigma_{\text{nominal}}$

Exemple :



Il convient d'insister sur le fait que les fissures considérées dans l'analyse mathématique ont un rayon de courbure nul. En considérant, un trou elliptique (grand axe  $2a$ , petit axe  $2b$ ) dans une grande plaque métallique sous une tension uniforme  $\sigma$  normale au grand axe, on a au fond d'une entaille

$$\rho = b^2/a \quad \text{et} \quad K_T = 1 + 2(a/\rho)^{1/2}$$

Lorsque l'ellipse s'aplatit infiniment jusqu'à être assimilée à une fissure ( $\rho \rightarrow 0$ ) on vérifie que  $K_T \rightarrow \infty$  et  $\sigma_{\max} \rightarrow \infty$ . Ce résultat n'a pas une signification physique car le rayon de courbure est généralement inconnu. Les valeurs de  $\sigma_{\max}$  et  $K_T$  sont alors suffisamment élevées pour assurer des déformations inélastiques dans cette région.

En retenant la théorie de l'élasticité on peut caractériser le champ des contraintes au front de fissure par un paramètre qui reste fini quand  $\rho \rightarrow 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho} \sigma_{\max}) = 2\sigma\sqrt{a}$$

Le facteur d'intensité de contraintes pour la fissure limite peut être défini par

$$\text{ou} \quad K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\pi\rho}}{2} \sigma_{\max} \right) = \sigma\sqrt{\pi a}$$

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} K_T \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi\rho} \right)$$

IRWIN

Il est à noter que cette dernière équation est peu utilisable en pratique.

### Intégrale de RICE

Un autre paramètre important en mécanique de la rupture a été proposé par RICE. Ce paramètre est noté  $J$ , et ses valeurs critiques peuvent être adoptées comme critères de rupture.

L'intérêt de ce paramètre  $J$  défini ci-après, réside essentiellement en ce qu'il peut être évalué pour une répartition arbitraire de contraintes et de déformations donc en particulier pour toute situation d'écoulement plastique.

Considérons un solide élastique de section  $A$  et d'épaisseur constante. L'énergie potentielle pour une épaisseur unité s'écrit :

$$P = \int_A w dA - \int_{\partial A} \vec{T} \cdot \vec{u} ds$$

où  $w$  représente l'énergie des déformations :  $w = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$

$\vec{T}$  représente les tensions présentes sur le bord  $\partial A$

$u$  représente le déplacement correspondant



Considérons ensuite le cas du solide comportant une fissure plate de sommet  $x=a$  et soit  $P(a)$  l'énergie potentielle définie à partir des équations précédentes.

Pour un solide soumis aux mêmes tensions et similaire en tous points au précédent à l'exception du sommet de fissure qui est maintenant  $x = a + \Delta a$ , on note  $P(a + \Delta a)$  l'énergie potentielle correspondante.

RICE a démontré que :

$$J = - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{P(a + \Delta a) - P(a)}{\Delta a} = - \frac{\partial P}{\partial a}$$

On peut écrire  $J$  sous la forme d'une intégrale le long d'un contour entourant le sommet de fissure :

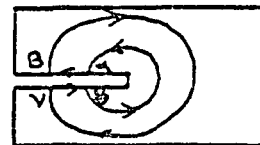
$$J = \int_{\Gamma} w dy - \overline{T} \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

On remarquera que l'intégrale de surface est nulle pour tout contour fermé.

$$\int_{\Gamma} (w dy - \overline{T} \frac{\partial u}{\partial z} dz) = 0$$

De plus, si l'on considère deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  entourant le sommet d'une pièce telle que la figure ci-contre, l'intégrale est nulle d'après l'équation précédente. Mais  $\overline{T} = 0$  et  $dy = 0$  sur  $AB$  et  $CD$  de sorte que :

$$\int_{\Gamma_1} (w dy - \overline{T} \frac{\partial u}{\partial z} dz) = \int_{\Gamma_2} (w dy - \overline{T} \frac{\partial u}{\partial z} dz)$$



L'intégrale est indépendante du parcours choisi dans le cas de l'élasticité. Par contre en plasticité ceci n'est pas toujours vérifié.

Le choix du contour d'intégration permet d'évaluer  $J$ . Ainsi dans le cas d'une fissure semi-infinie dans une lame finie de hauteur  $h$  dont les faces intérieures et supérieures sont fixées de sorte que  $\overline{u}$  soit constant sur la face ; il n'y a pas de contribution à  $J$  sur la face fixée, car  $dy = 0$  et  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$



De plus, en  $x \rightarrow -\infty$ ,  $w = 0$  et  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  la seule contribution provient de  $x \rightarrow \infty$  où  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  de sorte que  $J = hw\infty$  ou  $w\infty$  est la densité constante d'énergie de déformation en  $x = +\infty$

Le contour circulaire de rayon  $R$  et centré au sommet de la fissure peut être utilisé pour relier  $J$  à  $K_I$

$$\text{en résolvant } J = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ w(R, \theta) \cdot R \cos \theta - \bar{T}(R, \theta) \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(R, \theta) \cdot R \right] d\theta$$

On obtient  $J = \frac{K_I^2}{E}$  en contraintes planes

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \text{ en déformations planes}$$

en toute rigueur :

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{II}^2 + K_{III}^2) + \left( \frac{1+\nu}{E} \right) K_{II}^2$$

Pour l'évaluation numérique de  $J$ , le contour  $(r)$  est généralement choisi rectangulaire autour du sommet de fissure. Des détails sur le calcul de  $J$  par la méthode des éléments finis sont donnés notamment par SUMPTER (9). Des calculs numériques de KIC et de  $J_c$  ont été effectués au CETIM pour divers types d'éprouvette. D'une manière générale, les matériaux peu ductiles (zone plastique confinée) s'adaptent bien au calcul, la différence entre l'hypothèse élastique ou élasto-plastique, donne des écarts inférieurs à 1 %. Par contre, on enregistre des écarts notables pour les matériaux plus ductiles.

### III.2

#### Théorie de la mécanique de la rupture en élastoplastique

La théorie classique de l'élasticité prédit une tension infinie et des déformations importantes au fond d'une entaille à arête vive. Il paraît donc raisonnable, au voisinage d'un front de fissure, d'abandonner le modèle idéal de l'élasticité classique, qui n'est valable que lorsque les déformations sont suffisamment petites, et de recourir aux modèles des théories de la plasticité.

Les méthodes de calcul numérique permettent de déterminer assez correctement l'étendue des zones plastifiées, l'état des contraintes et les déformations pour une pièce quelconque.

Cependant, si on cherche seulement l'ordre de grandeur de cette étendue, on peut se contenter de raisonner comme si les équations relatives à l'élastoplasticité restaient valables jusqu'à la limite d'une zone plastifiée, et d'appliquer l'un des critères classiques pour le dépassement de la limite d'élasticité.

Le critère de Tresca, par exemple, se définit en fonction des contraintes principales par :  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c k_s$  où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales avec :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

En utilisant ce critère et en l'injectant dans les équations relatives à l'élasticité, on obtiendra à l'extrémité de la fissure :

$$\begin{aligned} \cdot \sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2}) \\ \cdot \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2}) \\ \cdot \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$

La limite de la zone plastique, lieu des points où le critère de Tresca s'applique, est donc donnée par :

$$r/r_y = \cos^2 \theta (1 + \sin \frac{\theta}{2})^2 \quad \text{en contraintes planes}$$

$$\text{avec } r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2$$

De même, en déformations planes, on obtiendra :

$$r/r_y = \cos^2 \theta [1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2}]^2$$

Le critère de Von Mises, lui, se définira par

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = c k_s^2$$

En reportant dans les équations précédentes, on aura :

$$r/r_y = \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad \text{en contraintes planes}$$

$$r/r_y = \cos^2 \frac{\theta}{2} ((1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad \text{en déformations planes}$$

La thèse d'Irwin tient compte de l'influence quantitative de la zone plastique en introduisant un simple facteur d'ajustement. L'influence moyenne de la déformation plastique sur le champ de contraintes élastiques est de limiter la contrainte maximum qui peut être atteinte, et d'effectuer une redistribution des contraintes.

Irwin admet que la zone plastique est d'étendue  $R$  à partir du sommet de la fissure ; que dans cette zone la distribution des contraintes est celle du seuil d'écoulement, tandis qu'à l'extrémité de cette zone et en raccordement avec elle, la redistribution est telle que l'ancien champ de contraintes soit augmenté de manière à ce que l'équilibre soit satisfait.

Plus précisément on aura :

- dans la zone plastique d'étendue  $R$ , la contrainte normale  $\sigma_y$  est égale à la limite d'élasticité  $\sigma_e$

- hors de cette zone, le profil des contraintes élastiques est le même que celui qu'on détermine dans l'analyse purement élastique si on le décale de  $R$

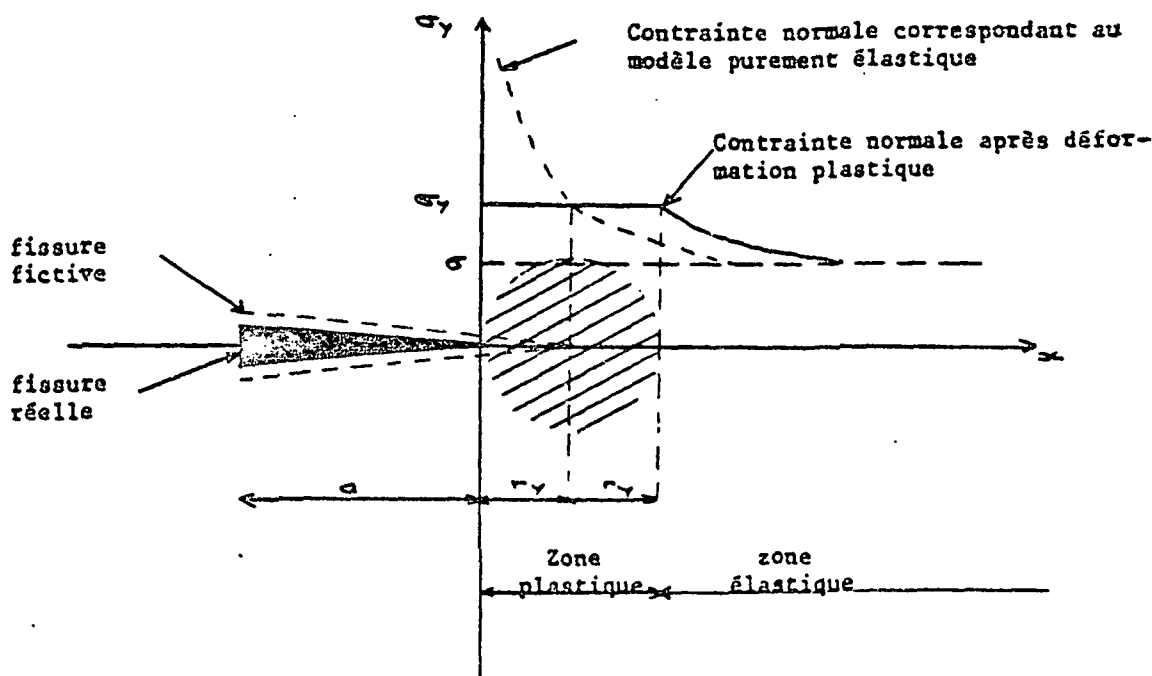
On remarque alors que :

- La première condition donne  $R = R_y$

avec  $R_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^2$  en contraintes planes

$R_y = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^2$  en déformations planes

- La deuxième condition montre que si l'on considère une fissure fictive de longueur  $2(a+R_y)$  le profil des contraintes est alors celui de la théorie élastique avec la valeur  $\sigma = \sigma_y$ .



Modèle d'IRWIN



### III.3

### Méthodes numériques

Il existe deux grands types de méthodes numériques pour la résolution de calcul des structures ; la résolution par éléments finis d'une part et celle par équations intégrales d'autre part.

Si l'on raisonne en élasticité, ces méthodes peuvent s'appliquer à la mécanique de la rupture en supposant la fissure comme un contour normal du domaine considéré.

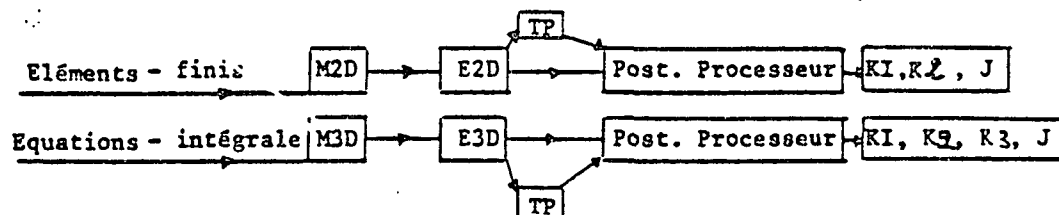
Il faut noter que les problèmes plans sont généralement résolus par la méthode des éléments finis alors que les calculs de structures massives tridimensionnelles le sont par les équations intégrales.

Les éléments finis pourraient s'appliquer également au calcul 3D, mais les équations intégrales qui ne nécessitent que le maillage de surface sont préférables.

En effet, mailler la surface au lieu du volume diminue les coûts de calcul et de main d'oeuvre, car le calcul et l'entrée des données se font plus rapidement. De plus, la précision des calculs est meilleure.

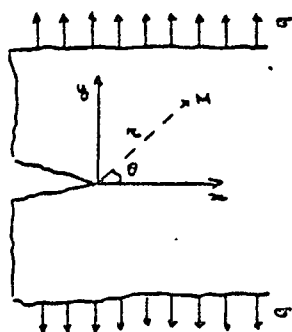
Ces propriétés proviennent du fait que le programme par éléments finis intègre la continuité des déplacements alors que la méthode par équations intégrales assure à la fois la continuité des déplacements et des contraintes.

Les étapes du programme CASTOR (Calcul de structures par Ordinateur) sont identiques. En tête on trouve le programme de maillage (2D ou 3D) vient ensuite, le programme calcul élastique lui-même et enfin le post-processeur ; intercalé entre les deux étapes précédentes se tient la tâche de stockage pour un nouveau calcul éventuel (TP)



### CALCUL DE K PAR LES METHODES EQUATIONS INTEGRALES ET ELEMENTS FINIS:

Considérons la pièce suivante :



La théorie de l'élasticité nous donne les déplacements  $u$  et  $v$  au niveau de la fissure en fonction de  $\theta$  et  $r$ .

$$\textcircled{8} \begin{cases} u = f(\theta, r) = \frac{2 k_z (1 + \nu)}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 - \nu + \sin^2\frac{\theta}{2} \right) \\ v = f(\theta, r) = \frac{2 k_r (1 + \nu)}{E} \left( \frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( (1 + \nu) - \cos^2\frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

Les points situés sur la fissure seront donnés par  $\theta = \pi$

pour lesquels 
$$\begin{cases} u = 0 \\ v = \frac{K_I \cdot 4 \cdot (1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \end{cases}$$

d'après (8)

En posant  $A = \frac{E \sqrt{2\pi}}{4(1-\nu^2)}$  on a  $K_I = A \cdot \frac{v}{\sqrt{z}}$

On fera des applications numériques pour différentes valeurs de  $v$  et de  $z$ ,  $v$  étant calculé par le programme des équations intégrales ou celui des éléments finis. Il suffira alors de prendre un nombre suffisant de points pour que la moyenne des résultats soit acceptable.

### CONCLUSION

Pour des matériaux de faible ductilité, des succès réels ont été marqués par l'emploi d'un facteur d'intensité de contraintes et de la valeur critique  $K_{IC}$ , caractéristique du matériau utilisé et permettant de lier la longueur d'une fissure à une contrainte critique. Ceci peut être utilisé pour les surveillances d'une structure en service.

La plupart des fissures observées dans les structures sont de forme elliptique ; elles peuvent déboucher à la surface ou rester à l'intérieur.



TIFFANY et MASTERS (10) ont calculé les longueurs critiques  $a_c$  de fissures susceptibles sous une contrainte donnée de se propager brutalement.

Elles sont données par :

- fissures débouchant en surface :

$$a_c = \frac{K_{IC}^2 [\phi^2 - 0,212 (\sigma/\sigma_0)^2]}{1,21 \pi \sigma^2}$$

- fissure interne

$$a_c = \frac{K_{IC}^2 [\phi^2 - 0,212 (\sigma/\sigma_0)^2]}{\pi \sigma^2}$$

$$\text{avec } \phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta$$

On peut utiliser ces résultats de différentes façons. Prenons par exemple le cas d'un réservoir à pression. Si l'on fait une hypothèse sur le rapport  $b/a$  d'une fissure préexistante dans le réservoir (ce qui fixe  $\phi$ ) on peut, si l'on connaît  $K_{IC}$ , tracer la courbe donnant  $a_c = f(\sigma)$ . Si l'on effectue un essai de pression au niveau  $\sigma_0$  et s'il n'y a pas rupture on est certain que la plus grande fissure existante dans le réservoir a une dimension inférieure à  $a_c$ .

L'hypothèse pessimiste consiste à la supposer égale à  $a_c$ . Si la structure est construite pour fonctionner sous une contrainte nominale de service  $\sigma_3$ , elle sera garantie tant que la dimension de la plus grande fissure sera inférieure à  $a_c$ . Dans le cas où la structure n'est soumise ni à un effet de fatigue, ni à un effet de corrosion sous tension, il n'y a pas danger de rupture brutale en service. Par contre, s'il y a possibilité d'intervention de ces effets, la durée de vie de la structure sera égale au temps nécessaire pour que la dimension de la fissure progresse de  $a_c$  en  $a_c$ . C'est ici que les lois de théories dynamiques de la mécanique de la rupture prennent tout leurs intérêts ; elles permettent en effet, de déterminer les vitesses de propagation d'une fissure soumise à des charges cycliques ou à un milieu corrosif, ces lois donnent en fonction de  $K_I$ , le temps nécessaire pour que la fissure se propage de  $a_c$  en  $a_c$ .

Au terme de cette période, une seconde épreuve hydraulique est nécessaire car la plus grande fissure existant avant la première épreuve avait peut être une dimension très inférieure à  $a_c$ .

On pourrait affirmer cette prédiction de durée de vie, grâce à une méthode de contrôle non destructif.

Les aciers et alliages à très haute résistance ne supportent sans dommage que des déformations plastiques très limitées. Ils sont donc justifiables de l'emploi de KIC.

A l'opposé les matériaux peu fragiles peuvent supporter des défauts de plus grandes dimensions aisément décelables mais les prévisions théoriques les concernant sont actuellement peu précises. La zone plastique dépendant à la fois de la géométrie de la pièce, de l'état de contraintes à laquelle est soumise la structure et du caractère statique ou dynamique de la fissuration.

Si la zone plastique à fond de fissure est petite, on admet que  $K_I$  décrit convenablement l'état des contraintes élastiques dans la région non écrouie.

Pour mesurer KIC il faut donc utiliser des éprouvettes pour lesquelles la zone plastique est suffisamment restreinte :

- épaisseur suffisante pour que l'on ait un état de déformations planes.
- longueur de la fissure suffisante pour que la zone plastique soit petite par rapport à la dimension de la fissure.
- longueur de l'éprouvette suffisante pour qu'il n'y ait pas possibilité de relaxations de contraintes par déformation plastique globale.

Ces considérations ont amené l'ASTM ( American Society for testing Material (13) ) à proposer des conditions pour la géométrie des éprouvettes que nous avons vues précédemment.

#### IV LOGICIEL

##### IV.1 Conception

Actuellement des logiciels de mécanique de la rupture sont disponibles. Mais ceux-ci ne peuvent se transférer que sur des ordinateurs puissants où les couts de main d'oeuvre et de calcul sont élevés et où le temps de calcul est grand. Ces logiciels ne sont pas accessibles par des PME, PMI et petits bureaux d'études, ils sont même trop sophistiqués pour résoudre la plupart des problèmes de tenue de pièces.

Nous avons conçu un programme écrit en BASIC minima, rassemblant la majorité des cas rencontrés, qui peut donc s'intégrer sur toutes les micromachines, de plus en plus présentes chez les professionnels de calculs de structure.

Aussi ce programme palliera à l'absence de documents dans le domaine de la rupture et permettra la diffusion quasi générale de la mécanique de la rupture. Pour l'établissement de notre programme, nous nous sommes fixés comme objectif de n'étudier que les pièces planes avec une ou plusieurs fissures et comportant ou non une particularité (Trous/inclusions....)

Par cela nous nous sommes appuyés sur le document: "Stress Intensity Factors (2) lui même rassemblant les cas étudiés dans divers ouvrages tels "International (5)  
"ENGINEERING FRACTURE MECHANICS"(4)  
"INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING (7)  
NASA TECHNICAL NOTE (8)  
le plus complet restant "THE STRESS ANALYSIS OF CRACKS HANDBOOKS"(3)

Dans un premier temps, nous nous sommes consacrés à la recherche d'équations paramétrant les familles de courbes représentées dans le "STRESS INTENSITY Factors" soit par identification en utilisant la méthode des moindres carrés, soit à l'aide d'un programme conçu au CETIM, permettant de trouver une équation polynomiale (approximation par polynômes de Tchebitchef).

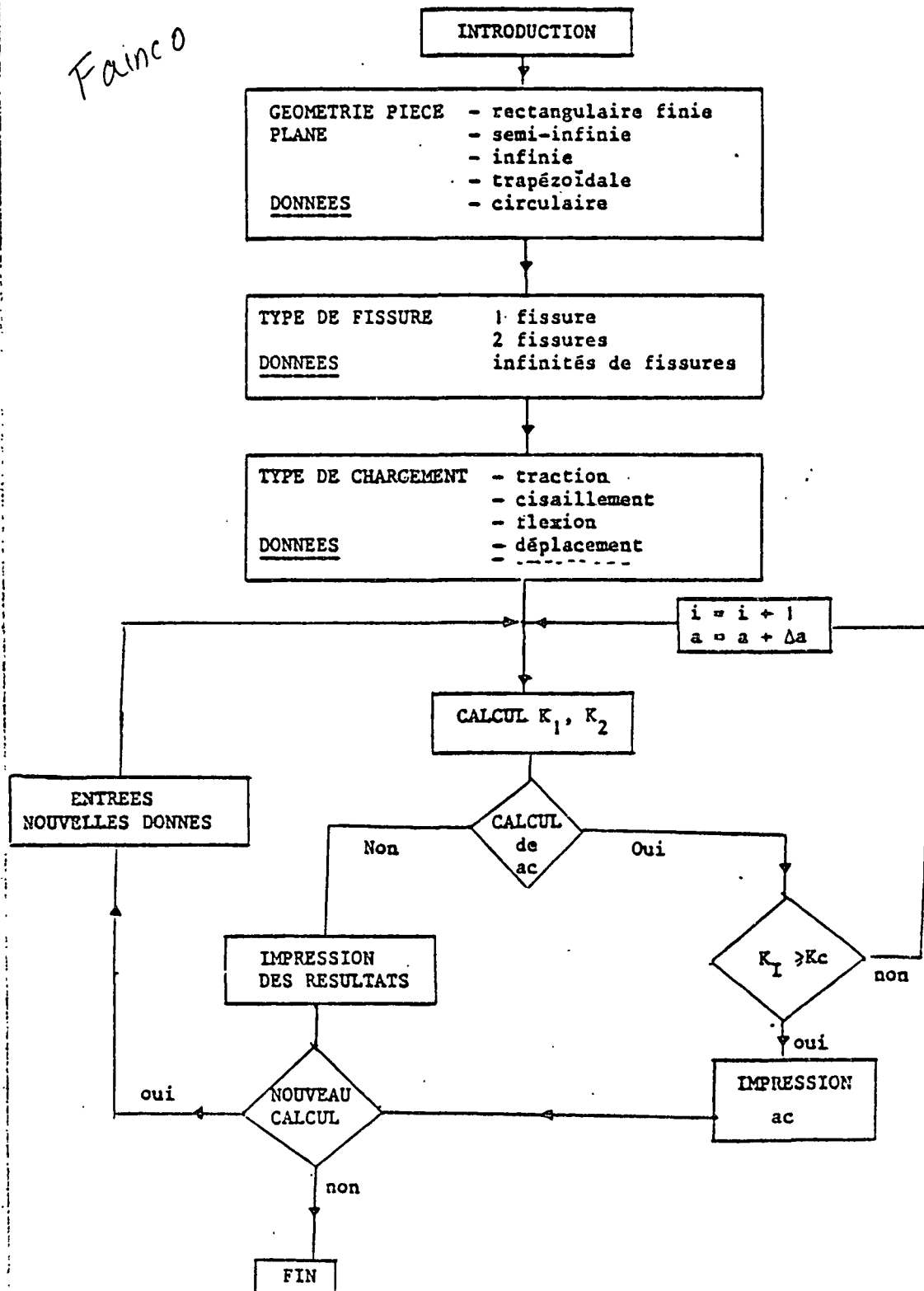
Dans un deuxième temps nous avons inséré les équations dans le programme dont l'organigramme est donné ci-après.

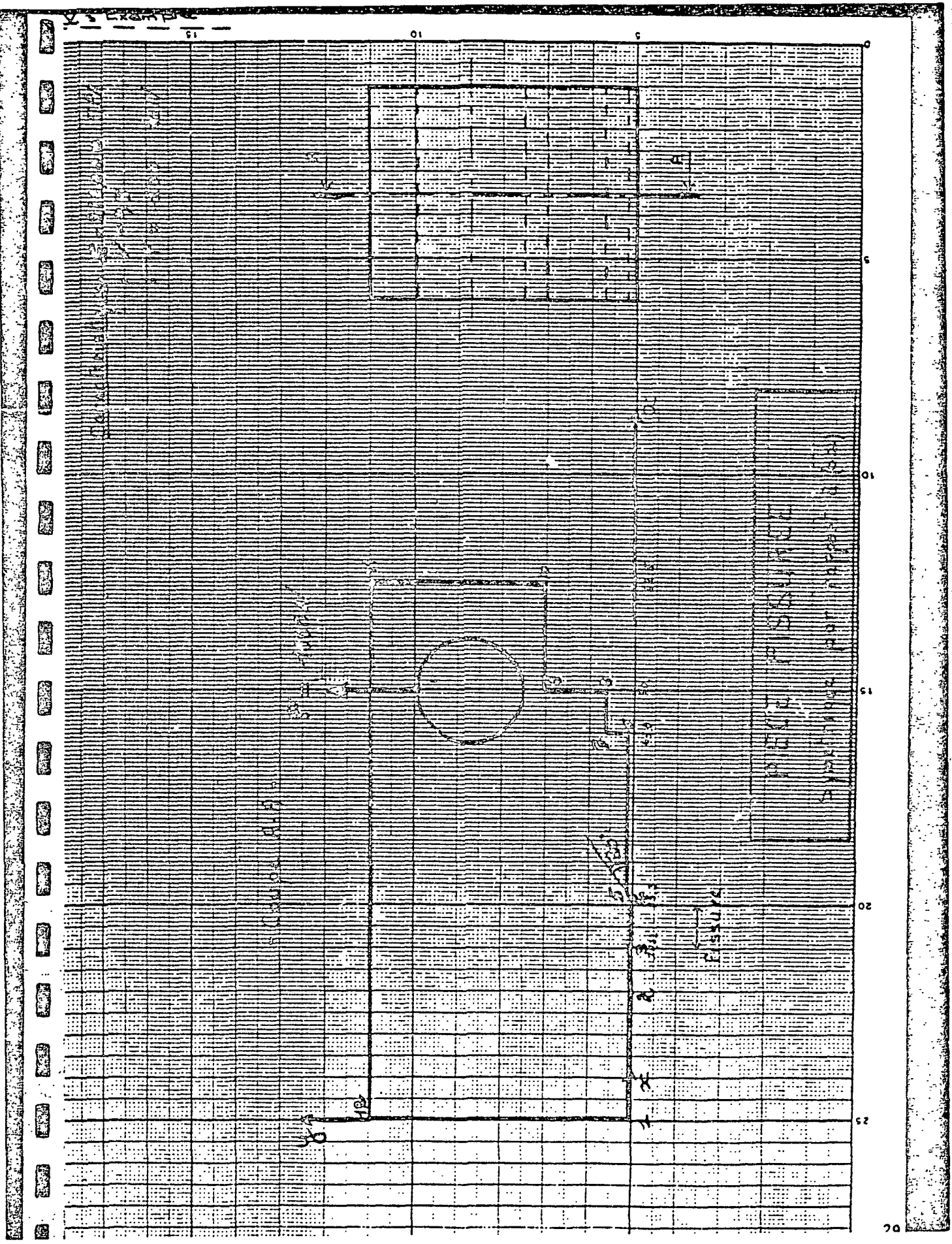
Toutefois, nous avons rencontré certaines abaques difficiles à paramétrer. Aussi, avons nous pensé les intégrer par l'intermédiaire d'un fichier comportant les coordonnées d'une dizaine de points par courbe et de faire ensuite des approximations paraboliques pour les valeurs désirées. Faut de temps nous n'avons pas pu réaliser tout cela.

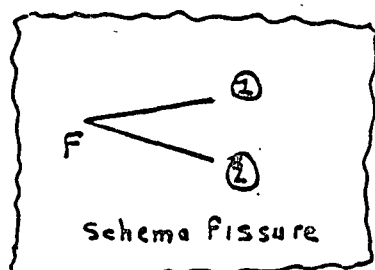
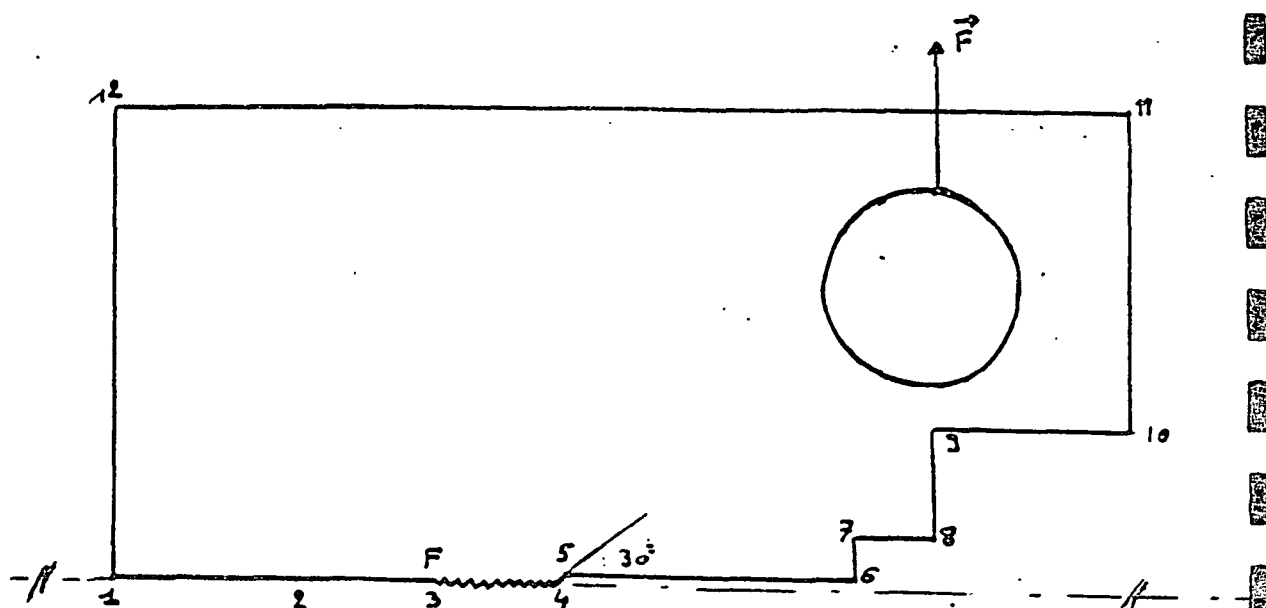
Nous noterons également que du fait d'une capacité mémoire limitée de l'ordinateur "CBM 4032", nous avons dû réaliser plusieurs programmes enregistrés sur une même disquette et chargés à partir d'instructions figurant dans un programme principal.

En espérant que de cette manière, nos successeurs éventuels pourront compléter le programme en insérant de nouveaux cas sans en changer la structure.

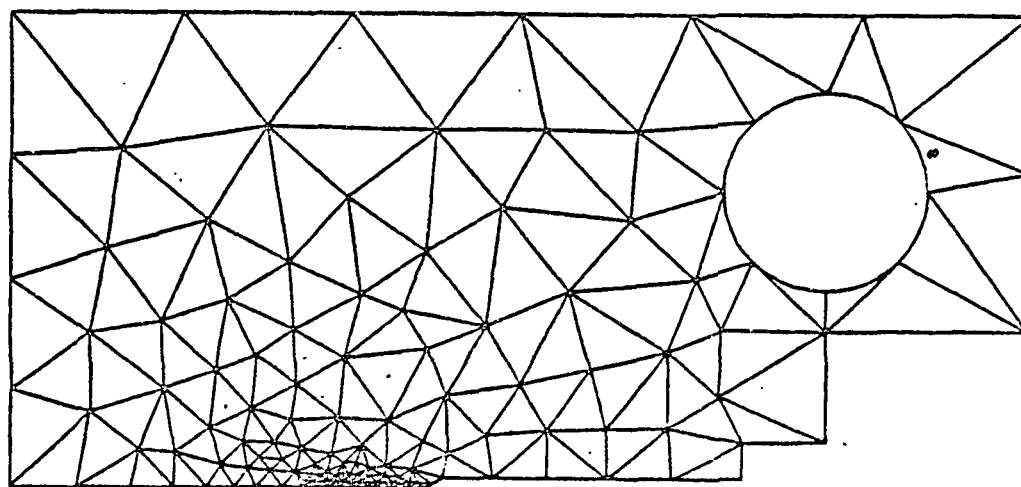
Fainco







- F: Front Fissure
- ①: Bord 1 : Noeuds 1 à 171
- ②: Bord 2 : symétrique



3 171 : numéros noeuds bords (x)  
 ← Fissure →

TITRE DU PROBLEME      CALCULATIONAL ROUND ROBIN ON EPFM (PHASE2)  
 DATE D'EXECUTION      09/06/83 13.47.45.

CALCUL DE K  
 ET INTEGRALE J

EN DEFORMATIONS PLANES

PARAMETRE DE DIFFERENTES ZONES

NO DE ZONE	MODULE ELASTIQUE	COEFFICIENT DE POISSON
1	.210E+06	.300

SYMETRIE DE LA FISSURE PAR RAPPORT A L'AXE DE X

FRONT DE FISSURE	NOEUD NUMERO
POINT A L'EXTREMITE 1 =	1
"	0
POINT A L'EXTREMITE 2 =	171
"	171

NO DE COURTOUR D'INTEGRATION	NOMBRE DE COUCH D'ELEMENTS
1	2
2	3
3	4

CAS DE CHARGE NO.      1



CAS OF CHARGE NO. 1

NOEU	U	V	RR	K1	K2
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1
30	1	1	1	1	1
31	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1
36	1	1	1	1	1
37	1	1	1	1	1
38	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1
46	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1
51	1	1	1	1	1
52	1	1	1	1	1
53	1	1	1	1	1
54	1	1	1	1	1
55	1	1	1	1	1
56	1	1	1	1	1
57	1	1	1	1	1
58	1	1	1	1	1
59	1	1	1	1	1
60	1	1	1	1	1
61	1	1	1	1	1
62	1	1	1	1	1
63	1	1	1	1	1
64	1	1	1	1	1
65	1	1	1	1	1
66	1	1	1	1	1
67	1	1	1	1	1
68	1	1	1	1	1
69	1	1	1	1	1
70	1	1	1	1	1
71	1	1	1	1	1
72	1	1	1	1	1
73	1	1	1	1	1
74	1	1	1	1	1
75	1	1	1	1	1
76	1	1	1	1	1
77	1	1	1	1	1
78	1	1	1	1	1
79	1	1	1	1	1
80	1	1	1	1	1
81	1	1	1	1	1
82	1	1	1	1	1
83	1	1	1	1	1
84	1	1	1	1	1
85	1	1	1	1	1
86	1	1	1	1	1
87	1	1	1	1	1
88	1	1	1	1	1
89	1	1	1	1	1
90	1	1	1	1	1
91	1	1	1	1	1
92	1	1	1	1	1
93	1	1	1	1	1
94	1	1	1	1	1
95	1	1	1	1	1
96	1	1	1	1	1
97	1	1	1	1	1
98	1	1	1	1	1
99	1	1	1	1	1
100	1	1	1	1	1

LA VALEUR MOYENNE DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE  
K1 = .1953E+04 K2 = 0.

DANS LE CALCUL DE K PAR LA REGRESSION LINEAIRE LES POINTS OF 1 A 7 AVEC L'INCREMENT 1 SONT PRISES EN  
compte

CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE A PARTIR DE DEPLACEMENTS

U = 0. \*SQRT(M) = 0. AVEC LE COEFFICIENT DE DETERMINATION = 1.0000  
V = .1542E-01\*SQRT(M) = -.2400E-02 " " = .9986

K1 = .2230E+04 K2 = 0.

CONCLUSION

Les développements nouveaux que l'on peut espérer à partir de la théorie des dislocations et peut-être des théories multipolaires, ainsi qu'une connaissance plus approfondie de la morphologie des fissures et leur extension sous divers modes de contraintes devraient permettre de progresser dans le choix des paramètres de ruptures et de préciser dans quelles conditions ils sont ou non caractéristiques d'un matériau donné.

Une constatation essentielle est que tous les matériaux usuels contiennent en plus ou moins grande quantité, non seulement des dislocations mais aussi des fissures décelables ou non selon la finesse du procédé de contrôle ; le voisinage des inclusions non métalliques étant un lieu privilégié pour l'apparition de fissures ; l'amélioration des structures passera par une chasse active aux défauts constitutifs du matériau, par un soin pris dans le tracé des pièces, ainsi qu'à éviter les angles vifs et tout ce qui peut entraîner une concentration locale de contraintes.

Dans cette attente, souhaitons que le programme conçu répondra aux désirs des industriels de plus en plus soucieux de calculer les pièces au plus juste pour éviter les surcroits de matière.

## VI

BIBLIOGRAPHIE

- (1) INTRODUCTION A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE CETIM 1973
- (2) STRESS INTENSITY FACTORS DP ROOBE, DJ CARTWRIGHT 1976
- (3) THE STRESS ANALYSIS OF CRACKS  
HANDBOOKS H. DATA, P. PARIS, G. IRWIN 1973
- (4) FRACTURE TOUGHNESS TESTING AND ITS APPLICATIONS  
A.S.T.M 1964
- (5) INTERNATIONAL JOURNAL OF FRACTURE MECHANICS
- (6) ENGINEERING FRACTURE MECHANIC
- (7) INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCE
- (8) NASA TECHNICAL NOTE
- (9) PUBLICATION DEPART : OF MECHANICAL ENGINEERING IMPERIAL  
COLLEGE, SUMPTER. LONDON Oct. 1972
- (10) APPLIED FRACTURE MECHANIS TIFANY MASTERS  
A.S.T.M. S + P 301 249-277.
- (11) THE PHENOMENON OF RUPTURE AND FLOW INSOLIDS, GRIFFITH  
Phil. trans. Royal. Soc. (London) sou A 221. 1920
- (12) MATHEMATICAL THEORY OF EQUILIBRIUM CRAKES IN BRITTLE  
FRACTURE  
Advances in applied vol. III Academiques 1962
- (13) A.S.T.M. standards, Mai 1968

Page...

Rapport n° F. de l'étude CCPR 1QQ96Q. du septembre.83

ANNEXE 2

EXEMPLES D'UTILISATION

---

CA.ST.OR R.D.M  
VERSION MAI 83

C.E.T.I.M SENLIS  
SERVICE METHODES  
DE CALCUL POUR  
BUREAUX D'ETUDES

FACTEUR INTENSITE DE CONTRAINTES  
POUR PIECES PLANES

LONGEUR FISSURE (MM.).....2A= 2

LARGEUR PIECE (MM.).....2B= 50

HAUTEUR PIECE (MM.).....2H= 100

EXCENTRICITE FISSURE (MM.)..C= 25  
MODULE DE YOUNG (MPA.).....E= 210000

COEFF. DE POISSON.....NU= .3

VALEUR DU CHARGEMENT..... CH= 1000

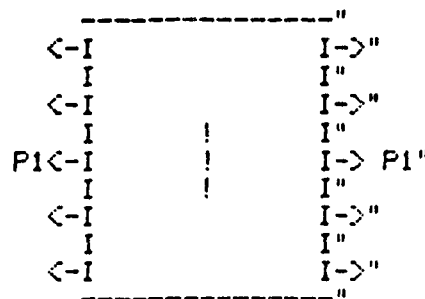
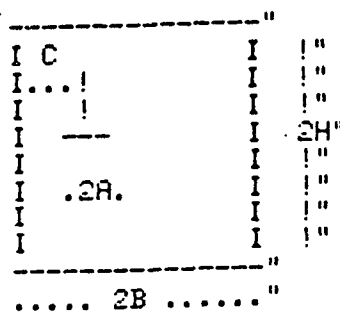
MODE SIMPLE DE RUPTURE  
MEGAPASCAL\*(METRE<sup>10.5</sup>).....K0= 56.0499122

MODE DE RUPTURE I  
MEGAPASCAL\*(METRE<sup>10.5</sup>).....KI= 56.1365975

MODE DE RUPTURE II  
MEGAPASCAL\*(METRE<sup>10.5</sup>).....KII= 0

TENACITE DE LA PIECE  
MEGAPASCAL\*(METRE<sup>10.5</sup>).....KC= 60

LONGEUR CRITIQUE(MM.).....2AC= 2.34812358



CA.ST.OR R.D.M  
 VERSION MAI 83

C.E.T.I.M SENLIS  
 SERVICE METHODES  
 DE CALCUL POUR  
 BUREAUX D'ETUDES

FACTEUR INTENSITE DE CONTRAINTES  
 POUR PIECES PLANES

LONGEUR FISSURE (MM.).....2A= 2

LARGEUR PIECE (MM.).....2B= 50

HAUTEUR PIECE (MM.).....2H= 300

EXCENTRICITE FISSURE (MM.)..C= 1  
 MODULE DE YOUNG (MPA.).....E= 210000

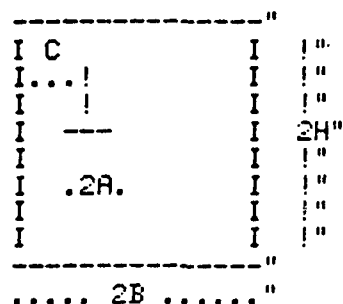
COEFF. DE POISSON.....NU= .3

VALEUR DU CHARGEMENT..... CH= .1

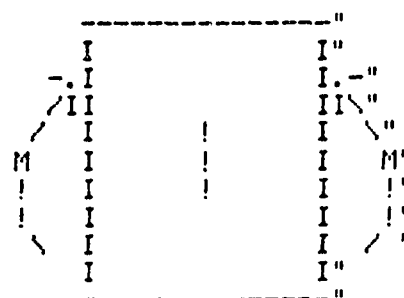
MODE SIMPLE DE RUPTURE  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....K0= 13.4519789

MODE DE RUPTURE I  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....KI= 14.1181637

MODE DE RUPTURE II  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....KII= 0



N.1"  
 FISSURE SIMPLE"

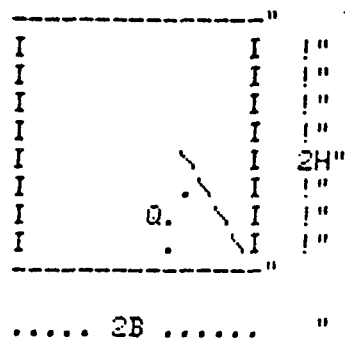


MOMENT DE FLEXION"

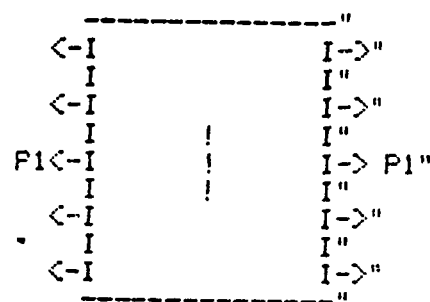
CA.ST.OR R.D.M C.E.T.I.M SENLIS  
 VERSION MAI 83 SERVICE METHODES  
 DE CALCUL POUR  
 BUREAUX D'ETUDES

FACTEUR INTENSITE DE CONTRAINTES  
 POUR PIECES PLANES

LONGEUR FISSURE (MM.).....2A= 2  
 LARGEUR PIECE (MM.).....2B= 100  
 HAUTEUR PIECE (MM.).....2H= 10  
 INCLINAISON FISSURE (DEG.)..Q= 45  
 MODULE DE YOUNG (MPA.).....E= 210000  
 COEFF. DE POISSON.....NU= .3  
 VALEUR DU CHARGEMENT..... CH= 2000  
 MODE SIMPLE DE RUPTURE  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....K0= 112.099824  
 MODE DE RUPTURE I  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....KI= 56.0678481  
 MODE DE RUPTURE II  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....KII= 57.0363906  
 TENACITE DE LA PIECE  
 MEGAPASCAL\*(METRE10.5).....KC= 60  
 LONGEUR CRITIQUE(MM.).....2AC= 1.1574785



N.3"  
 FISSURE A L'ANGLE"



ANNEXE 3

CONFIGURATIONS

---

- Traitées dans :

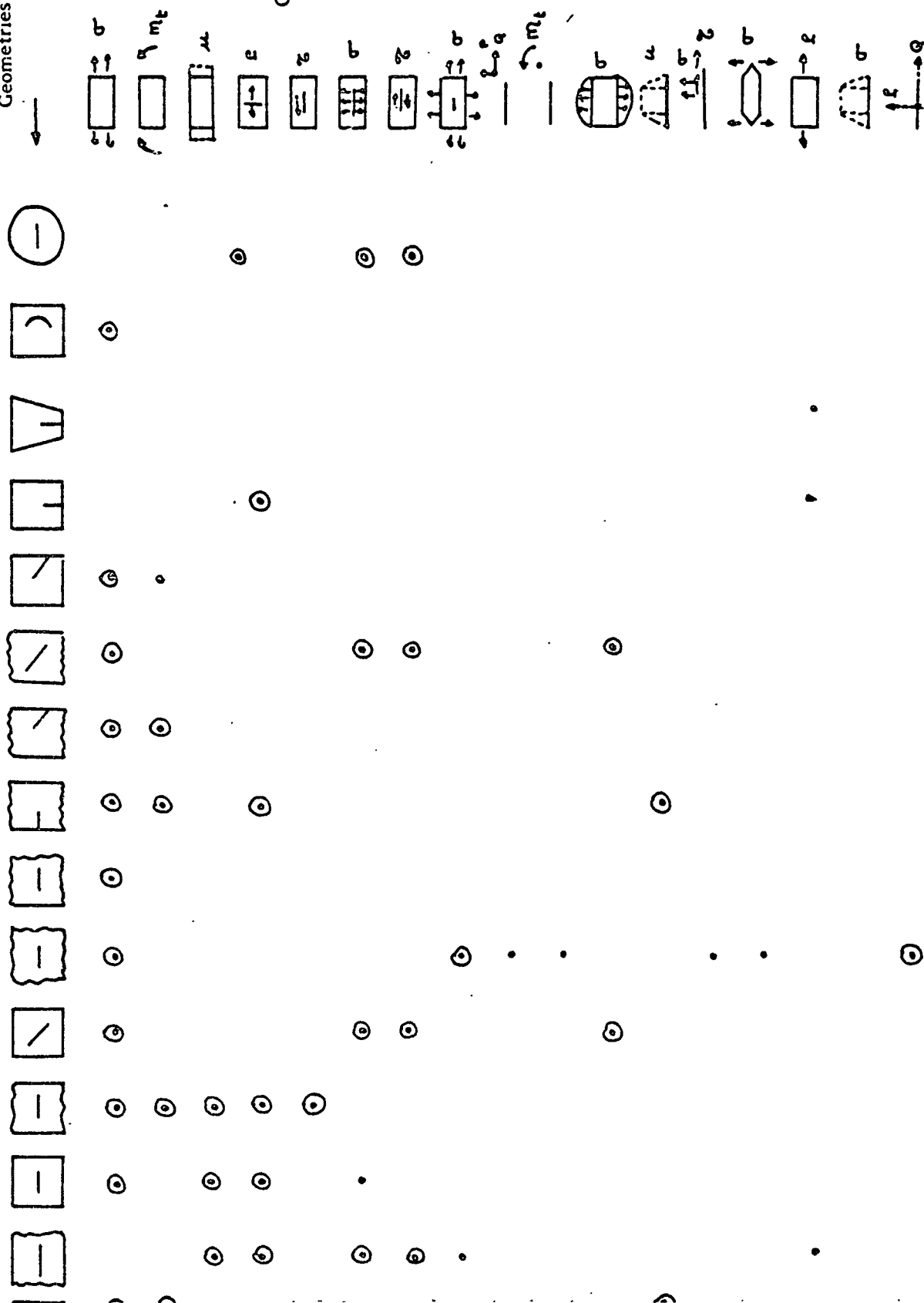
- . Stress Intensity Factors : D.P. ROOKE - DJ CARTWRIGHT
- . The stress Analysis of Cracks Handbooks: H. TADA - P. PARIS-  
G. IRWIN

- Implantées dans FAINCO



# LETTER

## Chargements



: Dimension infinie ;  
: Dimension finie ;

- : Solution connue
- Q : Solution programmée

# LETIM

